Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

18. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, 25.05.2024.

1. Одреди све ненегативне целе бројеве x, y и просте бројеве p за које важи:

$$3^x + p^2 = 7 \cdot 2^y.$$

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви који задовољавају $ab + bc + ca = \dfrac{3}{4}$. Докажи да важи неједнакост:

$$(a+b+c)^6 \geqslant \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (1+(a+b)^2) \cdot (1+(b+c)^2) \cdot (1+(c+a)^2).$$

Када важи знак једнакости у овој неједнакости?

3. Да ли је могуће на поља табле 70×70 поставити:

(а) 2024 жетона тако да сваки квадрат 2×2 садржи паран број жетона;

(б) 2023 жетона тако да сваки квадрат 2×2 садржи непаран број жетона?

На сваком пољу табле може се налазити највише један жетон.

4. Нека је I центар уписане кружнице оштроуглог троугла ABC ($AB \neq AC$) и M средиште странице BC. Означимо са M' тачку на правој BC такву да је $IM' = IM$ ($M \neq M'$), а са K средиште оног лука BC описане кружнице троугла ABC који садржи тачку A. Ако права AK сече праву BC у тачки L, докажи да тачке K, L, I, M' припадају једној кружници.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.